Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I – Relación 5

Cálculo de límites – Desigualdades – Optimización

Cálculo de límites.

- Antes de empezar a calcular un límite funcional, simplifica todo lo que puedas la función y no escribas el símbolo “lím” hasta que no tengas una idea clara de cómo vas a hacer los cálculos.
- Trata de reducir el límite a otros bien conocidos. Para hacer eso debes recordar algunos límites que se repiten con frecuencia.

$$\begin{array}{|lll|}\hline \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=1, \\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}, & \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha, \\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\frac{1}{6} & \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=1, \\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\frac{1}{3}, & \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}. \\ \hline\end{array}$$

- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un **producto** o en un **cociente** de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. Los límites anteriores proporcionan las equivalencias asintóticas más útiles. ¡Ojo! En una suma no puedes, en general, hacer eso.
- Cada vez que apliques las reglas de L’Hôpital comprueba que puedes hacerlo, es decir que se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Cada vez que derives al aplicar dichas reglas debes simplificar la expresión obtenida antes de volver a derivar.
- En general, no descompongas un límite como suma o producto de otros dos, pero si quieres hacerlo tienes que asegurarte de que dichos límites existen.
- Debes saber usar el criterio de equivalencia logarítmica que resuelve con frecuencia indeterminaciones del tipo 1^∞ y 0∞.

Desigualdades.

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes. Son desigualdades del tipo:

$$\alpha(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant \beta(b-a)$$

donde se supone que f es derivable en $]a,b[$ y continua en $[a,b]$ y que para todo $x\in]a,b[$ se verifica que $\alpha\leqslant f'(x)\leqslant\beta$. Con frecuencia α y β dependen de a y de b.

Ejercicios en los que se pide probar una desigualdad del tipo $f(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\geqslant a$, donde f y g son funciones derivables. Se hace lo siguiente:

- Se define $h(x) = g(x) - f(x)$ y se comprueba que $h(a) = 0$.
- Se comprueba que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

Esta última desigualdad implica que h es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h(a) = 0$, concluimos que $h(x) \geqslant 0$, es decir, $g(x) - f(x) \geqslant 0$, para todo $x \geqslant a$.

Naturalmente, los detalles pueden cambiar. Puede que el punto a debas elegirlo tú. Es una estrategia que tiene éxito cuando la desigualdad $h'(x) \geqslant 0$ es más fácil que la inicial. Puede ocurrir que esta desigualdad siga siendo complicada; entonces podemos aplicarle a ella el mismo procedimiento, comprobamos que $h'(a) = 0$ y que $h''(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$, lo que implica que h' es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h'(a) = 0$, concluimos que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

También debes tener en cuenta que probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$ donde I es un intervalo, y hay un punto $a \in I$ tal que $f(a) = g(a)$, es lo mismo que probar que en el intervalo I la función $h(x) = g(x) - f(x)$ alcanza un mínimo absoluto en el punto a.

Cuando la desigualdad que se pide probar es estricta $f(x) < g(x)$ para todo $x \in I$, lo que se hace es calcular la imagen del intervalo I por la función $h(x) = g(x) - f(x)$ para probar que $h(I) \subset \mathbb{R}^+$. Si probamos que h es estrictamente monótona en I entonces $h(I)$ es el intervalo que tiene como extremos los límites de h en los extremos de I.

Optimización.

Una de las aplicaciones más útiles de las derivadas es a los problemas de optimización. En dichos problemas se trata, por lo general, de calcular el máximo o el mínimo absolutos de una magnitud. Hay una gran variedad de problemas que responden a este esquema y con frecuencia tienen contenido geométrico o económico o físico. Por ello cada uno de estos ejercicios requiere un estudio particular. Los siguientes consejos pueden ser útiles:

- Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.
- Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.
- Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.
- Las condiciones del problema deben permitir establecer el dominio de f.
- Estudia la variación del signo de la derivada de f en su dominio para calcular máximos y mínimos absolutos.

Ejercicios

1. Calcula los límites siguientes.

   a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen}(x^2))}{(\mathrm{e}^{2x} - 1)\ln(1 + 2x)}$.

   b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\dfrac{2 - 2\cos x}{x^2}\right)}{x \operatorname{arc\,tg} x}$.

   c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\,\mathrm{e}^{x^2} - 2\cos x}{3x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. Prueba las desigualdades:

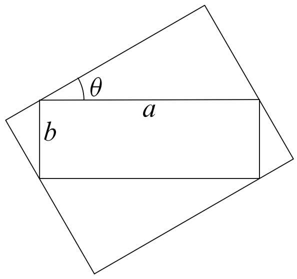
   a) $\displaystyle \frac{y - x}{\sqrt{1 - x^2}} < \operatorname{arc\,sen} y - \operatorname{arc\,sen} x < \frac{y - x}{\sqrt{1 - y^2}}$ donde se supone que $0 < x < y < 1$.

b) $\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) > \dfrac{1}{1+x}$ para todo $x > 0$.

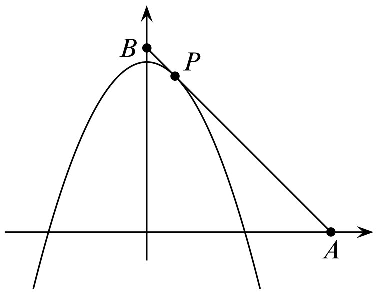
3. ¿Hay algún número $a > 0$ que verifique que $a^{x/a} \geqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$? ¿Cuál es dicho número?

4. Estás en el desierto con tu vehículo situado en un punto cuyas coordenadas son $A = (0, 40)$ y tienes que ir a otro punto $C = (28, 0)$ (la unidad de medida es la milla terrestre). Del punto A al origen $O = (0, 0)$ y de éste al punto C hay una carretera asfaltada. Pero también, para ir de A a C, puedes hacer parte o todo el camino sobre la arena. En carretera tu velocidad es de 75 millas por hora; y sobre la arena de 45 millas por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a C?

5. Calcula el área del rectángulo de máxima área que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado cuyos lados tiene longitudes a y b.



6. Calcula un punto $P = (u, v)$, con $u > 0$, de la parábola $y = 4 - x^2$ de forma que el segmento AB determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga longitud mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.



Para entregar el lunes 14 de enero.